◆ Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

Να εξετάσετε αν αυτή συγκλίνει.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $a_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \overset{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1}{=\!=\!=} 1$$

Δηλ. η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=1$

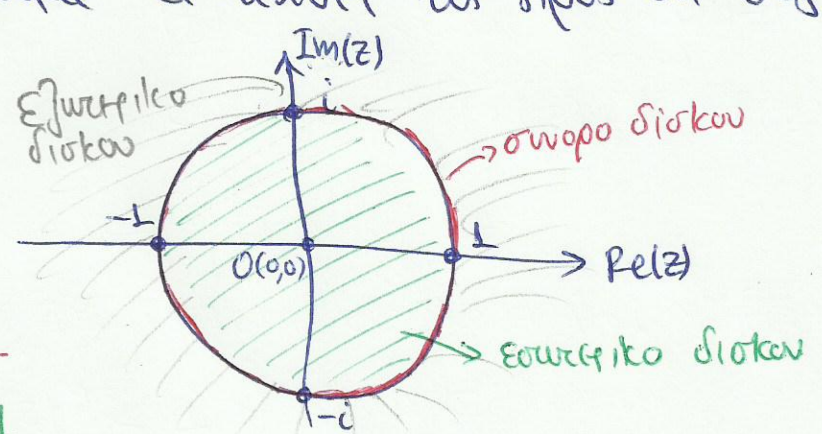
Τώρα, για $z=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\dots$

όπου αυτή η σειρά (από κρ. Leibnitz) συγκλίνει.

Όμως, για $z=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$

όπου αυτή η αρμονική σειρά ως γνωστόν αποκλίνει

Άρα, στο σύνορο του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R=1$ υπάρχουν σημεία που η δυναμοσειρά δεν ξέρουμε τι κάνει ως προς τη σύγκλιση.



$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2<1$

$x^2+y^2>1$